《数学》测试样题讲解

深圳北理莫斯科大学，计算数学与控制系

Example 1

解方程式[a]

$$\left|\left|x^2-8x+2\right|-x^2\right|=2x+2. \tag{1}$$

[a]答案：$x\in\{0;1;2;5\}$

Solution 1

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2\geq 0, \\ \left|x^2-8x+2\right|-x^2=\pm\left(2x+2\right). \end{cases} \tag{2}$$

$$\left|x^2-8x+2\right|=x^2\pm(2x+2). \tag{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-8x+2=\pm\left[x^2\pm\left(2x+2\right)\right], \\ x^2\pm 2x+2\geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Example 2

解方程式[b]

$$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2} \tag{5}$$

[b] 答案：$x = \frac{35\pi}{84}, x = \frac{53\pi}{84}, x = \frac{59\pi}{84}$

Solution 2

利用和差角公式：

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \tag{6}$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \tag{7}$$

因此，可得：

$$\frac{1}{2}\cos(7x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \sin(7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{8}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + 7x\right) = \cos\left(\pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) \tag{9}$$

$$\frac{\pi}{3} + 7x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \tag{10}$$

当$\dfrac{\pi}{3}+7x=\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi$ 时，解得：

$$x=\left(\frac{5}{84}+\frac{2k}{7}\right)\pi=\frac{24k+5}{84}\pi \tag{11}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{53}{84}\pi \\ \\ k=2 \end{cases} \tag{12}$$

当$\dfrac{\pi}{3}+7x=-\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi$时，解得：

$$x=\left(-\frac{1}{84}+\frac{2k-1}{7}\right)\pi=\frac{24k-13}{84}\pi \tag{13}$$

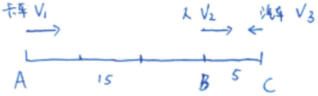
$$\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{35}{84}\pi \\ \\ k=2 \end{cases}\quad\begin{cases} x=\dfrac{59}{84}\pi \\ \\ k=3 \end{cases} \tag{14}$$

Example 3

从地点A往地点C行驶一辆卡车，两地距离20千米。同时从位于A和C之间，距离点A为15千米的地点B，往地点C走着一个行人，迎面从点C行驶来一辆汽车。多久卡车能追上行人？已知这件事发生在卡车和汽车相遇30分钟后。并且路途上行人和汽车相遇所需时间是卡车和汽车相遇时间的三分之一。[c]

[c] 答案：45分钟

Solution 3



$$\begin{cases} v_1 t = v_2 t + 15 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{15}{v_1 - v_2} \\ t = \dfrac{20}{v_1 + v_3} + 30 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{20}{4\left(v_1 - v_2\right)} + 30 \\ \dfrac{5}{v_2 + v_3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{20}{v_1 + v_3} \quad \Rightarrow \quad v_3 = 3v_1 - 4v_2 \end{cases} \tag{15}$$

Example 4

解不等式[d]

$$\log_{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\pi}} \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0. \tag{16}$$

[d] 答案：$x \in \left(1;\ \sqrt[3]{5}\right)$

Solution 4

$$\sqrt{6}+\sqrt{3} > 2\sqrt{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} = 2\sqrt{\sqrt{18}} > 2\sqrt{\sqrt{16}} = 4 > \pi \tag{17}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 1 \ \Rightarrow\ 0 < \log_5 x < \frac{1}{3} \tag{18}$$

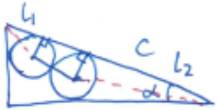
$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 1 \ \Rightarrow\ 0 < \log_5 x < \frac{1}{3} \tag{19}$$

Example 5

5. 直角三角形斜边为c，一个锐角为α。此三角形中有两个相同半径的圆，每一个都同一个直角边，斜边和另一个圆相切。找出圆的半径。[e]

[e] 答案：$\dfrac{c}{2+\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$

Solution 5



假设圆半径为r，根据题意可得：

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{l_2}{r},\qquad \cot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{l_1}{r}. \tag{20}$$

$$c=l_1+2r+l_2=r\cdot\cot\frac{\alpha}{2}+2r+r\cdot\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=r\left(\cot\frac{\alpha}{2}+2+\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Example 6

找出参数a的所有数值使得方程组有解[f]

$$\begin{cases} y(ax+1)+13x-a(y+1)=0, \\ x-xy+|y+2|=0. \end{cases} \tag{21}$$

[f] 答案：$a\in(-\infty;-10]\cup(1/2;+\infty)$

Solution 6

- 如果$y=1$，则$x-xy+|y+2|=0$不成立，所以一定有$y\neq 1$，且$x=\frac{|y+2|}{y-1}$。
- 将$x=\frac{|y+2|}{y-1}$代入方程式中，化简得
  $ay|y+2|+y(y-1)+13|y+2|-a\left(y^2-1\right)=0$。

(i). 当$y\geq -2$时，则$|y+2|=y+2$，代入上述方程得 $y^2+2(a+6)y+a+26=0$。

- 我们需要该方程在$[-2;1)\cup(1;+\infty)$上至少有一个根，所以应满足
  $\frac{1}{4}\Delta=(a+6)^2-(a+26)=a^2+11a+10\geq 0$。
- 解得$\boxed{a\in(-\infty;-10)\cup[-1;+\infty)}$。$\boxed{y_{1,2}=-(a+6)\pm\sqrt{a^2+11a+10}}$。

- 如果$a \le -10$，显然$y_2 = -(a+6) + \sqrt{a^2+11a+10} \ge 4+0 = 4$，满足$y$成立条件。
- 如果$a \ge -1$，则$y_1 = -(a+6) - \sqrt{a^2+11a+10} \le -5-0 = -5$，显然$y_1 \notin [-2;1) \cup (1;+\infty)$。
- 故我们需要分析当$y_2 = -(a+6) + \sqrt{a^2+11a+10} \in [-2;1) \cup (1;+\infty)$时，$a$是否$\ge -1$.
- $y_2 \ge -2 \Rightarrow \sqrt{a^2+11a+10} \ge a+4 \Rightarrow a^2+11a+10 \ge a^2+8a+16 \Rightarrow a \ge 2$。
- $y_2 \ne 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+11a+10} \ne a+7 \Rightarrow a^2+11a+10 \ne a^2+14a+49 \Rightarrow a \ne -13$。
- 因此，对于任意$\boxed{a \in (-\infty;-10] \cup [2;+\infty)}$，我们至少可以得到一组解

$$\begin{cases} x = \dfrac{|y+2|}{y-1} \\ \\ y = \sqrt{a^2+11a+10} - a - 6 \end{cases}$$

(ii). 当$y \leq -2$时，则$|y+2| = -y-2$，代入方程式得

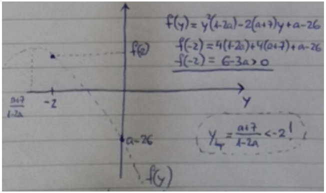
$$y^2(1-2a) - 2(a+7)y + (a-26) = 0.$$

通过(i)的分析，我们只需要考虑$a \in (-10;2)$时的情况。

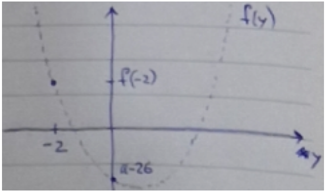
- 如果$a = \frac{1}{2}$，则有$-15y - \frac{51}{2} = 0$，解得$y = -1.7$， 不满足$y \leq -2$，舍去。
- 如果$a \neq \frac{1}{2}$，则对$\forall a \in \left(-10;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};2\right)$，成立

$$\frac{\Delta}{4} = (a+7)^2 - (1-2a)(a-26) = 3a^2 - 39a + 75 = 3\left(a^2 - 13a + 25\right) > 0.$$

令 $\boxed{f(y) = y^2(1-2a) - 2(a+7)y + (a-26)}$，利用函数图像分析：



(a). 当$a \in \left(\frac{1}{2};2\right)$时，则$1-2a < 0, a-26 < 0, a+7 > 0$。
$f(-2) = 4(1-2a) + (a+7) + a - 26 = 6 - 2a > 0$;
且对称轴$\frac{a+7}{1-2a} < -2$，所以根据函数图像可知，对于$\forall y \in (-\infty;-2)$，
当$a \in \left(\frac{1}{2};2\right)$时，函数都有一个零点比$-2$小，满足条件!



(b). 当$a \in \left(-10;\frac{1}{2}\right)$时，同样地，$f(-2)>0, f(0)=a-26<0$;

在这种情况下函数图像对称轴$\frac{a+7}{1-2a}>-2$, 根据函数图像可知，
对于$\forall y \in (-\infty;-2)$, 当$a \in \left(-10;\frac{1}{2}\right)$时
函数所有零点都比-2大，不满足条件，舍去.

综上，$a \in (-\infty;-10] \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$。

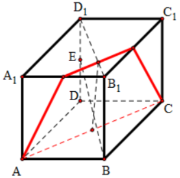
Example 7

立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$的边长为a，点E为边DD_1的中点。找出经过点C并垂直于直线BE的截面面积。
g

---

g答案：$\dfrac{9a^2}{8}$

Solution 7



$$h^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{9}{8} \tag{22}$$

$$S = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) \cdot h \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{9a^2}{8} \tag{23}$$

Example 8

找出方程的所有整数解[h]

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1 \tag{24}$$

[h]答案：$x=-31, x=7$

Solution 8

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1 \iff \frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=2\pi n$$

$$\iff \sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16n, n\in\mathbb{Z} \iff \begin{cases} 3x-16n\geq 0, \\ 160x+800=-96nx+256n^2. \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} x\geq \frac{16n}{3} \\ x=\frac{8n^2-25}{3n+5} \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq \frac{16n}{3} \\ \frac{9}{8}x=\dfrac{9n^2-25-\frac{25}{8}}{3n+5}=3n-5-\dfrac{\frac{25}{8}}{3n+5} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x\geq \frac{16n}{3} \\ 9x=8\left(3n-5\right)-\frac{25}{3n+5} \end{cases}$$

分类讨论所有情况：

$$3n+5=-25 \Rightarrow n=-10, x=\frac{800-25}{-25}=-31, \text{满足} x \geq \frac{16n}{3}$$

$$3n+5=25 \Rightarrow n=\frac{20}{3} \Rightarrow \varnothing$$

$$3n+5=-5 \Rightarrow n=-\frac{10}{3} \Rightarrow \varnothing$$

$$3n+5=5 \Rightarrow n=0, 9x=-45, x=-5, \text{不满足} x \geq \frac{16n}{3}, \text{舍去}$$

$$3n+5=-1 \Rightarrow n=-2, 9x=-63, x=-7, \text{满足} x \geq \frac{16n}{3}$$

$$3n+5=1 \Rightarrow n=-\frac{4}{3} \Rightarrow \varnothing$$

综上，$x=-31, x=-7$。

谢谢！

祝你们成功！